

Title	オイラーの変分法(2) (数学史の研究)
Author(s)	尾崎, 文秋
Citation	数理解析研究所講究録 (2010), 1677: 187-196
Issue Date	2010-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/141275
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

オイラーの変分法 2

九州大学大学院数理学府 尾崎 文秋 (FUMIAKI Ozaki)
Graduate school of Mathematics,
Kyushu University.

概要

レオンハルト・オイラーは変分法のテキスト *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* において、変分法を絶対的方法と相対的方法に分けている。前者はヨハン・ベルヌーイの最速降下線問題を、後者はヤコブ・ベルヌーイの等周問題を基にしている。そしてそれぞれに無限解析を適用して、変分法を作り上げた。昨年の講究録では、絶対的方法の初めての部分の解説をした。ここでは絶対的方法の残りの部分の解説と本文第 4 章の練習問題を通して変分法の発展の過程を考察する。

1 絶対的方法

変分法の絶対的方法は 2 つに分かれており、本文の 2 章と 3 章に分けて説明している。

1.1 絶対的方法 (1)

変分法の絶対的方法の前半では積分式の極値問題について、積分式

$$\int_0^x Z dx \quad (1)$$

の Z を導関数の次数を変えてそれぞれの公式を導き出した。

例えば、 $Z = \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{x}}$ のように y の 1 階導関数を含む場合は、その全微分 $dZ = \frac{dx\sqrt{1+y^2}}{2x\sqrt{x}} + \frac{y'dy'}{\sqrt{x(1+y^2)}}$ の dy, dy' の係数をオイラー方程式

$$N - \frac{dP}{dx} = 0 \quad (2)$$

に代入すれば極値を与えるような微分方程式を得ることができた。この場合 N は dy の係数、 P は dy' の係数を表している。上記の dZ の場合だと dy が無いので N が 0、 dy' の係数が $\frac{y'}{\sqrt{x(1+y^2)}}$ となり、オイラー方程式 (2) は $dP=0$ つまり $P = \text{Const.}$ となる。ここから

$$P = \frac{y'}{\sqrt{x(1+y^2)}} = \text{Const.} \quad (3)$$

ここで、この定数 Const. を $= \frac{1}{\sqrt{a}}$ と置くと、

$$P = \frac{y'}{\sqrt{x(1+y^2)}} = \text{Const.} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (4)$$

$$ay'^2 = x + y'^2 x \text{ よって,}$$

$$y' = \sqrt{\frac{x}{a-x}} \text{ と } y' = \frac{dy}{dx} \text{ から}$$

$$dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}} \quad (5)$$

この微分方程式 (5) を満たす曲線はサイクロイドである。

この結果はヨハン・ベルヌーイが最速降下線問題で示したことである。

最終的にはオイラー方程式 (2) を発展させて、導関数の次数が任意のときのオイラー方程式を与えている。

2 絶対的方法 (2)

絶対的方法の後半は、積分式の中に不定積分量が入っているものを扱う。

$$\int_0^x \left(\int_a^x [Z] dx \right) dx \quad (6)$$

当時は定積分のこのような記号法は無いので、オイラーは積分量全体 (H) から定量 ($\int_0^a [Z] dx = \int L dx$) を引くという方法でこれを表している。 $\int_a^x = H - \int L dx$

式 (6) についてのオイラー方程式は不定積分量中の [Z] を変分させて求めている。この (6) に対するオイラー方程式は、[Z] の全微分を $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dy' + [Q]dy'' + [R]dy''' + [S]dy^{IV} \dots$ とすると

$$0 = [N](H - \int L dx) - \frac{d[P](H - \int L dx)}{dx} + \frac{dd[Q](H - \int L dx)}{dx^2} - \frac{d^3[R](H - \int L dx)}{dx^3} + \frac{d^4[S](H - \int L dx)}{dx^4} \dots \quad (7)$$

となる。 実際の問題では、

例 I (3 章-15)

問題 もし Π は曲線 $\int y dx$ の面積を表し、そして Z はある Π の関数ならば、与えられてた切除線 $= a$ に対し、式 $\int Z dx$ の値が極大または極小になる曲線を見つけよ。

この問題は、

$$\int_0^x \left(\int_a^x y dx \right) dx \quad (8)$$

に極値を与える曲線を求めている。

この場合 Z は $\int_a^x y dx$ となり、また Π の関数である。 $dZ = L d\Pi$ と置くと、

L は $\Pi = \int y dx$ の関数であるから $d\Pi = y dx$

これより $[Z] = y$ そして $d[Z] = 1$ となる。

$$d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dy' + \dots \quad (9)$$

だから、 $[M] = 0$, $[N] = 1$, $[P] = 0$, $[Q] = 0$, etc. となる。これをオイラー方程式 (7) に代入すると求める曲線の方程式 $0 = H - \int L dx$ が得られる。ここから $H = \int L dx$ となり、そして H は積分式全体なので $L = 0$ となる。これより $dZ = 0$ つまり $\Pi = \int y dx = \text{const.}$ となる。そして更に微分をすると $y = 0$ となる。これより軸である 1 つの直線 $y = 0$

が問題を満足する。このとき $x = a$ である。

オイラーは次々に式 (6) の不定積分量を増やしていき、最終的には、

$$\begin{aligned} & \int Z dx \quad \int \left(\int \left(\int \left(\int \square dx \right) dx \right) dx \right) dx \\ dZ &= Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdy' + Qdy'' \dots \quad \text{このとき} \quad \Pi = \int [Z] dx \\ d[Z] &= [L]d\pi + [M]dx + [N]dy + [P]dy' + [Q]dy'' + \dots \quad \text{このとき} \quad \pi = \int [z] dx \\ d\pi &= l d\zeta + [m]dx + [n]dy + [p]dy' + [q]dy'' + \dots \quad \text{このとき} \quad \zeta = \int [\square] dx \\ d\zeta &= \mu dx + \nu dy + \phi dy' + \chi dy'' + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

極大極小式：

$$\begin{aligned} & N + [N]T + [n]V + \mu W - \frac{d(P + [P]T + [p]V + \phi W)}{dx} \\ & + \frac{dd(Q + [Q]T + [q]V + \chi W)}{dx^2} - \dots \\ & (W = F - \int [l] dx (G - \int [L] dx (H - \int L dx))) \end{aligned} \quad (11)$$

このようなものまで考えて、最後に積分量がいくつあっても、それに対する極大極小式をつくることができると結んでいる。

なぜこの種の不定積分量を含む問題を取り扱ったのかは 3 章 46 節の例 II の問題からわかる。

その問題は $\int_a^z [Z] dx = \Pi$ として、 $\int \frac{dx \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{\Pi}} dx$ の極値問題である。この問題では $\int_a^z [Z] dx = \Pi$ が明示的に与えられず、

$$d\Pi = gdx - \alpha \Pi^n dx \sqrt{1+y^2} \quad (12)$$

という微分方程式でのみ与えられている。このような問題を解く方法を見るためにまず不定積分量が明示的に与えられているものから初めていったのである。

ここで式 (12) に注目すると、このような形の式は、力学のテキスト [4] の第二巻の第 3 章 “De motu puncti super data linea in medio resistente.” (抵抗媒体の中で与えられた線の上を動くの質点の運動について) においてよく似た微分方程式が見られる。

本文では、抵抗媒体の中をある曲線に沿って滑り落ちる運動から

$$dv = gdx - Rds \quad (13)$$

という式を元に、この R を複雑にして物体の運動を考察している。

式 (13) は「抵抗の無い状態での物体の速度」を $dv = gdx$ 、また「物体が静止しているときの抵抗」を $dv = Rds$ (ds は曲線の線素、 R は抵抗) として、これらから作られている。

しかし [4] においては式 (12) は出てこない。この式は力学の観点からではなく、数学の観点から見てオイラーが作り出したものと思われる。問題を解いていく過程で都合よく曲率半径が現れることから説明ができる。これらの作業を経てオイラーは実際に 3 章 46 節の例 II を解くための公式を導いている。以下本文を引用する。

PROPOSITIO V 問題

38. もし Π は微分方程式 $d\Pi = [Z]dx$ のみによってしか与えられないとき、その微分方程式の $[Z]$ の中に曲線に関する量 $x, y, p^{(1)}, q^{(2)}, r, \text{etc.}$ の他に量 Π を含んでいるとすると、

$$d[Z] = [L]d\Pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + \dots$$

となる。 Z はある Π と $x, y, p, q, \text{etc.}$ の関数であるから

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \dots$$

このとき、与えられた切除線 $AZ = a$ に対し式 $\int Zdx$ は極大あるいは極小になる曲線を見つけよ。

解

Z と同様に $[Z]$ が含む微分が2次より超えないと仮定する。³⁾ 切除線 AZ の A から L までは定数とするとこの部分は向軸線のある部分を小部分 nv だけ変化させても変化しない。切除線 $AL = x$ と向軸線 $Ll = y$ と置くと $\int Zdx$ は小部分 nv だけ増加した向軸線 $Nn = y'$ から変化を受けない。そして微分値は0になる。式 $\int Zdx$ の微分値は全切除線 AZ の要素 $Zdx, Z'dx, Z''dx, Z'''dx, \text{etc.}$ から集められなければならない。各々のこれらの要素の微分値をこのように置く。

$$\begin{array}{lcl} d\Pi & = & nv \cdot \alpha \\ d\Pi' & = & nv \cdot \beta \\ d\Pi'' & = & nv \cdot \gamma \end{array} \left| \begin{array}{lcl} d\Pi''' & = & nv \cdot \delta \\ d\Pi^{IV} & = & nv \cdot \varepsilon \\ d\Pi^V & = & nv \cdot \zeta \end{array} \right| \begin{array}{lcl} d\Pi^{VII} & = & nv \cdot \eta \\ d\Pi^{VIII} & = & nv \cdot \theta \\ & & \text{etc.} \end{array}$$

Table 1

従ってこれより微分値は、

$$\begin{aligned} d \cdot Zdx &= nv \cdot dx \left(L\alpha + \frac{Q}{dx^2} \right) \\ d \cdot Z'dx &= nv \cdot dx \left(L'\beta + \frac{P'}{dx} - \frac{2Q'}{dx^2} \right) \\ d \cdot Z''dx &= nv \cdot dx \left(L''\gamma + N'' - \frac{P''}{dx} + \frac{Q''}{dx^2} \right) \\ d \cdot Z'''dx &= nv \cdot dx L''' \delta \\ d \cdot Z^{IV}dx &= nv \cdot dx L^{IV} \varepsilon \\ d \cdot Z^Vdx &= nv \cdot dx L^V \zeta \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

となる。今これらの文字 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \text{etc.}$ を決定するために量 $\Pi, \Pi', \Pi'', \text{etc.}$ の微分値を $d\Pi, d\Pi', d\Pi'', \text{etc.}$ とする。そして

$$\begin{aligned} \Pi &= \int [Z]dx \\ \Pi' &= \int [Z]dx + [Z]dx \\ \Pi'' &= \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx \\ \Pi''' &= \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx + [Z'']dx \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

¹⁾ dy' を dp と置いた。

²⁾ dy'' を dq と置いた。

³⁾ オイラーはこれ以前に極大極小式を導くには2次までの導関数についての極大極小式がわかれば、その次数より高い導関数があってもその極大極小式は自動的にわかることを示している。だからここでは2次までと仮定した。

となる。 $\int [Z]dx$ は仮定から小部分 nv からの影響を受けないので、それゆえ式 $[Z]dx$, $[Z']dx$, $[Z'']dx$, etc. の微分値を探されなければならない。それは、

$$\begin{aligned}
 d \cdot [Z]dx &= nv \cdot dx \left([L]\alpha + \frac{[Q]}{dx^2} \right) \\
 d \cdot [Z']dx &= nv \cdot dx \left([L']\beta + \frac{[P']}{dx} - \frac{2[Q']}{dx^2} \right) \\
 d \cdot [Z'']dx &= nv \cdot dx \left([L'']\gamma + [N''] - \frac{[P'']}{dx} + \frac{[Q'']}{dx^2} \right) \\
 d \cdot [Z''']dx &= nv \cdot dx \cdot [L''']\delta \\
 d \cdot [Z^{IV}]dx &= nv \cdot dx \cdot [L^{IV}]\epsilon \\
 d \cdot [Z^V]dx &= nv \cdot dx \cdot [L^V]\zeta \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

となる。それゆえこのことから次のことがわかる。

$$\begin{aligned}
 d\Pi &= \alpha \\
 d\Pi' &= nv \cdot dx \left([L]\alpha + \frac{[Q]}{dx^2} \right) \\
 d\Pi'' &= nv \cdot dx \left([L]\alpha + [L']\beta + \frac{[P']}{dx} - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx^2} \right) \\
 d\Pi''' &= nv \cdot dx \left([L]\alpha + [L']\beta + [L'']\gamma + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} \right) \\
 d\Pi^{IV} &= nv \cdot dx \left([L]\alpha + [L']\beta + [L'']\gamma + [L''']\delta + [N'''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} \right) \\
 d\Pi^V &= nv \cdot dx \left([L]\alpha + [L']\beta + [L'']\gamma + [L''']\delta + [N'''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} \right) \\
 d\Pi^V &= nv \cdot dx \left([L]\alpha + [L']\beta + [L'']\gamma + [L''']\delta \right. \\
 &\quad \left. + [L^{IV}]\epsilon + [N^{IV}] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} \right) \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

これらと **Table 1** の値とを比較すると、

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0 \\
 \beta &= [L]\alpha + \frac{[Q]}{dx^2} \\
 \gamma &= dx \left([L]\alpha + [L']\beta + \frac{[P']}{dx} - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx^2} \right) \\
 \delta &= dx \left([L]\alpha + [L']\beta + \frac{[P']}{dx} - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx^2} \right) \\
 \gamma &= dx \left([L]\alpha + [L']\beta + [L'']\gamma + [L''']\delta + [N'''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} \right)
 \end{aligned}$$

となる。そして式を整理すると、

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0 \\
 \beta &= \frac{[Q]}{dx^2} \\
 \gamma &= [L'] [Q] + [P'] - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx^2} \\
 \delta &= [L''] [Q] + [L''] [L'] [Q] dx + [L''] [P'] dx \\
 &\quad - [L''] [Q] - 2[L''] d[Q] + [N''] dx - d[P'] + \frac{dd[Q]}{dx}
 \end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$\begin{aligned}
 \delta &= [L''] [L'] [Q] dx + [L''] [P'] dx - [Q] d[L'] \\
 &\quad - 2[L''] d[Q] - [N''] dx - d[P'] + \frac{dd[Q]}{dx}
 \end{aligned}$$

この計算によって δ の値は記述される。そして更に

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \delta (1 + [L'''] dx) \\
 \zeta &= \delta (1 + [L'''] dx) (1 + [L^V] dx) \\
 \eta &= \delta (1 + [L'''] dx) (1 + [L^V] dx) (1 + [L^V] dx) \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

この値がわかったので、要素 $Zdx + Z'dx + Z''dx$ の対応する微分値は、

$$= nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} + L[L][Q] + L[P] - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx} \right)$$

となる。そして Z まで続く要素の微分値は、もし

$$V = [L^2][Q] + [L][P] - \frac{[Q]d[L + 2[L]d[Q]]}{dx} + [N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2}$$

すなわち $\delta = Vdx$ と仮定すると、次のようになる：

$$\begin{aligned}
 &= nv \cdot dx (L''' dx + L^V dx (1 + [L'''] dx) + L^V dx (1 + [L'''] dx) (1 + L^V dx) \\
 &\quad + L^V dx (1 + [L'''] dx) (1 + L^V dx) (1 + L^V dx) + \text{etc.}) V
 \end{aligned}$$

だからこの系列の和は見つかる。ここで L''' の代わりに L , $[L''']$ の代わりに $[L]$ と書いて、そしてこれらを足し合わせて S と置くと、

$$\begin{aligned}
 S &= Ldx + L'dx(1 + [L]dx) + L''dx(1 + [L]dx)(1 + [L']dx) \\
 &\quad + L'''dx(1 + [L]dx)(1 + [L']dx)(1 + L''dx) + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

となる。さて S の真隣の値を $S + dS'$ をとると、

$$S + dS' = L'dx + L''dx(1 + [L']dx) + L'''dx(1 + [L']dx)(1 + [L'']dx) + \text{etc.}$$

となる。そしてこれは、

$$\begin{aligned}
 -dS &= Ldx + L'[L]dx^2 + [L]dx \cdot L''dx(1 + [L']dx) \\
 &\quad + [L]dx \cdot L'''dx(1 + [L']dx)(1 + [L'']dx) + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

となり、

$$-dS = Ldx + S'[L]dx$$

となる. $S = S'$ としてよいので,

$$dS = -S[L]dx - Ldx. \quad (14)$$

これを積分する.

まずはじめに,

$$\frac{dS}{dx} + S[L] = 0 \quad (15)$$

と置いて, $\frac{dS}{S} = -[L]dx$ として積分すると

$$\begin{aligned} \log S &= -\int [L]dx + \log A \quad \log A \text{ は積分定数} \\ S &= Ae^{-\int [L]dx}. \end{aligned} \quad (16)$$

これを微分すると,

$$\frac{dS}{dx} = \frac{dA}{dx}e^{-\int [L]dx} - A[L]e^{-\int [L]dx}. \quad (17)$$

ここで式 (14) と (16) から $\frac{dS}{dx} = -Ae^{-\int [L]dx}[L] - L$. これを式 (17) に代入すると,

$$-Ae^{-\int [L]dx}[L] - L = \frac{dA}{dx}e^{-\int [L]dx} - Ae^{-\int [L]dx}[L] \quad (18)$$

$$\frac{dA}{dx}e^{-\int [L]dx} = -L$$

$$dA = -Le^{-\int [L]dx}dx$$

$$A = -\int Le^{-\int [L]dx}dx + C. \quad (19)$$

よってこれと式 (16) から

$$e^{\int [L]dx}S = C - \int e^{\int [L]dx}Ldx$$

となる. この定数 C は $x = a$ と置くと $S = 0$ になるように受け取られる. だからこの級数の値は,

$$S = e^{-\int [L]dx}(C - \int e^{\int [L]dx}Ldx)$$

となる. それゆえ提示された式 $\int Zdx$ の微分値が次のようになる.

$$\begin{aligned} nv \cdot dx &\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} + L[L][Q] + L[P] - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx} \right. \\ &\left. + S \left([L^2][Q] + [L][P] - \frac{[Q]dL + 2[L]d[Q]}{dx} + [N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} \right) \right). \end{aligned}$$

これを整理すると,

$$nv \cdot dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} + [N]S - \frac{d \cdot [P]S}{dx} + \frac{dd \cdot [Q]S}{dx^2} \right).$$

よって, もし Z と同様に $[Z]$ も微分が任意定量上がっていたとしても, このことから式 $\int Zdx$ の微分値を作ることができる. その上, 積分式 $\int e^{\int [L]dx}Ldx$ の値を作り出すことができる. これを実行する. もし $x = a$ と置くと積分式 $= H$, そして, この表示式を V を使ってもっと短くすることができる. 微分値は,

$$= nv \cdot dx \left(N + [N]V - \frac{d \cdot (P + [P]V)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]V)}{dx^2} - \frac{d^3(R + [R]V)}{dx^3} + \text{etc.} \right)$$

となる。そしてこれより求める曲線の方程式が生じた。

$$0 = N + [N]V - \frac{d \cdot (P + [P]V)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]V)}{dx^2} - \frac{d^3(R + [R]V)}{dx^3} + \frac{d^4(S + [S]V)}{dx^4} - \text{etc.} \quad (20)$$

この極大極小式を使って続く例題を解いている。

3 これまでに教示された方法の利用について

変分法のテキスト [2] の第 4 章のタイトルは

“De usu Methodi hactenus traditae in resolutione varii generis quaestionum”

様々な種類の問題の解決における、これまでに教示された方法の利用について

である。この章では前章で確立した変分法の絶対的方法を使って様々な問題を解いているのだがそれまでは直行座標平面での議論だったのだが、3 章の一番最後で

この方法(曲線を見つけるために 2, 3 章で展開された方法)の適用範囲は、曲線に所属する 2 つの変化量を越えて単に解析的抽象 (Analytica abstractio) の状態にある 2 つの変化量へと広がっていく。

と締めくくり 4 章に入っている。解析的象徴とは完全に任意の 2 つの変化量 x と y がある方程式 $f(x, y) = 0$ で結ばれていることを指している。このようにオイラーは更に広い数学の世界に目を向けているのである。この記述からそれまでの関数概念から新しい関数概念へ移っていった変遷も見取れる。一問目は極座標上での極値問題である。

例 I

与えられた中心 C(Fig.7) から半径 CA, CM を引くとき、角度 ACM に含まれるあらゆる線分の間で最も短くなる線 AM を見つけよ。

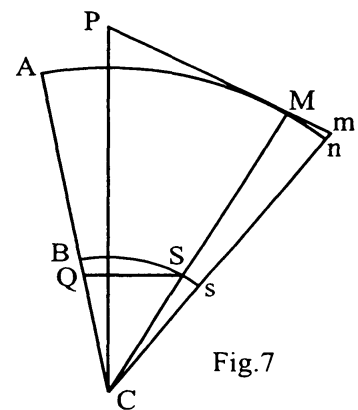


Fig.7

線 AM の長さは与えられた角度 ACM に対して最小の長さにならないといけない。角度 ACM を x と置く。半径 CM を別の変化量 y とする。この変化量 x と y 間の方程式によって求める曲線 AM がわかる。そして半径 Cm の近くに $Ss = dx$ と $mn = dy$ を取ると、 $Cn = CM$ となる。更に三角形 CSs と CMn は相似だから

$$1 : dx = CM[y] : Mn[ydx]$$

となる。これより $Mm = \sqrt{dy^2 + y^2 dx^2}$ となる。一般に $dy = p dx$ だから $Mm = \sqrt{y^2 + p^2}$ となる。ここから $AM = \int dx \sqrt{y^2 + p^2}$ 。この線が与えられた x の値に対し最小にならないといけない。この式にオイラー方程式 $N - \frac{dP}{dx} = 0$ を使用すると任意の x の値が最小になる問題を満足する曲線が求まる。
 $Z = \sqrt{y^2 + p^2}$ だから

$$dZ = \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + p^2}} + \frac{p dp}{\sqrt{y^2 + p^2}}$$

ここで $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$ において

$$M = 0, N = \frac{y}{\sqrt{y^2 + p^2}}, P = \frac{p}{\sqrt{y^2 + p^2}}, Q = 0, R = 0, \text{etc.}$$

だから $dZ = Ndy + Pdp$ という形になる。また $N - \frac{dP}{dx} = 0$ に $dy = p dx$ を代入した方程式 $Ndy = p dP$ を考える。この式を方程式 $dZ = Ndy + Pdp$ に代入すると $dZ = Pdp + p dP$ が生じる。これを積分すると、

$$Z + C = Pp$$

この方程式に $Z = \sqrt{y^2 + p^2}$, $P = \frac{p}{\sqrt{y^2 + p^2}}$ を代入すると、

$$C + \sqrt{y^2 + p^2} = \frac{p^2}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

それゆえに

$$\frac{y^2}{\sqrt{y^2 + p^2}} = \text{Const.} = b \quad (21)$$

となる。これを解くと、

$$\begin{aligned} x &= 2b \int \frac{dt}{t^2 + b^2} + C' \\ y &= \frac{b}{\sin(x - \alpha)} \\ b &= y \sin(x - \alpha) \\ b &= y(\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha) \\ b &= \cos \alpha (y \sin x) - \sin \alpha (y \cos x) \\ y \sin \alpha &= Y \quad y \cos x = X \text{ と置くと,} \\ Y \cos \alpha - X \sin \alpha &= b. \end{aligned}$$

これは2つの任意定数 b と α を含む直線の方程式である。
 求める線は与えられた2点を通過するという条件を問題に加えることで解が確立する。
 そのときその与えられた2点を通って引かれた直線は問題を満足する。

これ以降 x の y 関係が解析的表示式では表すことのできない問題が続いていく。

1. 極座標上
2. $f(x, y) = 0$, x と y の関係が「切除線」と「面積」
3. x と y の関係が「切除線」と「弧長」
4. 曲面の問題
5. x と y の関係が「切除線」と「扇形の面積」
6. $\int y dx \cdot \int x dy$ の極値問題

7. $\int y dx \cdot \int dx \sqrt{1+p^2}$ の極値問題

8. $\int y x dx \cdot \int x dx \sqrt{1+p^2}$ の極値問題

この後は、 $\frac{\int Z}{\int Y}$ の形に続いていく。

また上の例題の 5 問目からの問題の解法を一般化している。

PROPOSITIO II. 問題

14. $x = a$ と置くと式 $\int Z dx \cdot \int Y dx$ が極大または極小になるような x と y の間の方程式を見つけよ。

$\int Z dx$ と $\int Y dx$ を A と B と置いてそれぞれを変分させた後にそれぞれの微分を合わせてそれを 0 と置いて公式を作り出している。そしてこの公式の正しさを示すために $\int Z dx \cdot \int Y dx$ という形で以前絶対的方法 (2) でも解いた問題を用意し、その問題を新しい方法と絶対的方法 (2) を使って二通りのやり方で解を求めている。そしてこれらを考察して新しい公式が正しい事を確かめている。このような問題のようにも不定積分量が含まれている積分式の極値問題を発展させている。

参考文献

- [1] 尾崎 文秋: “オイラーの変分法 (1)” 京都大学数理解析研究所講究録 **1625**, pp.67–77, 京都, (2009).
- [2] Leonhard Euler : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausannae & Genevae (1744). I cite the reprint in: Leonhard Euler, *Opera omnia*, series I, vols. 24 (= EO I, 24), Basel (1952).
- [3] Leonhard Euler : “Commentationes analyticae ad calculum variationum pertinentes.”, *Opera omnia*, series I, vols. 25 (= EO I, 25), Basel (1952).
- [4] Leonhard Euler : *Mechanica, volume 1, 2. Opera omnia*, series II, vols. 1 and 2 (= EO II, 1 and 2), Basel (1912).